

# Некоторые задачи вычислительной геометрии. Изогеометрическое сглаживание и геометрический поиск

А. И. Куликов

Новосибирский государственный университет

Новосибирск, Россия

[kulikov@nmsf.ssc.ru](mailto:kulikov@nmsf.ssc.ru)

## Аннотация

Разработаны алгоритмы вычислительной геометрии для задач визуализации данных: геометрического поиска для множества произвольных многогранников в 3-мерном пространстве и изогеометрического сглаживания на плоскости и в пространстве на основе локальных сплайнов.

**Ключевые слова:** локальный сплайн, изогеометрическое сглаживание, геометрический поиск, вычислительная сложность.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время все большую актуальность приобретает разработка специализированного программного обеспечения для обработки результатов математического моделирования и визуализации научных расчетов. В этих разработках существенную роль играют методы вычислительной геометрии. Важнейшей характеристикой разрабатываемых алгоритмов считается их эффективность, особенно в плане времени. В работе рассмотрены алгоритмы геометрического поиска и изогеометрического сглаживания.

## 2. ЛОКАЛЬНОЕ ИЗОГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ СГЛАЖИВАНИЕ

### 2.1. Изогеометрическое сглаживание на плоскости

Приведем описание алгоритма изогеометрического сглаживания ломаной на плоскости. Этот вопрос рассматривался в [3]. Для прямого угла ABC, заданного соответственно точками  $(-1,0)$ ,  $(0,1)$ ,  $(1,0)$ , будем искать полином четвертой степени  $f(x)$ , симметричный относительно оси  $Y$  и удовлетворяющий условиям (в точках  $A$  и  $C$ ):

$$f(1)=f(-1)=0, f'(1)=-f'(-1)=-1, f''(1)=f''(-1)=0;$$

Такой полином, вписанный в прямой угол ABC, будет гладко сопрягаться с ним в точках  $A$  и  $C$ ; Вышеуказанным условиям удовлетворяет следующий полином:

$$f(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{5}{8}$$

Теперь рассмотрим угол  $A'B'C'$  заданный тремя произвольными точками, не лежащими на одной прямой. Для тройки точек  $A, B, C$  и тройки точек  $A', B', C'$  существует невырожденное линейное преобразование, переводящее точки первой тройки в соответствующие точки второй. Если подвергнуть этому преобразованию полином  $f(x)$ , получим новую кривую, которая сохранит условия для сглаживания нового угла. Для произвольной ломаной можно построить сплайн, сглаживая каждый ее угол и сопрягая затем эти

локальные сплайны в серединах ее звеньев. Отметим, что для произвольных трех точек  $A, B, C$  в пространстве не лежащих на одной прямой можно аналогичным образом построить сглаживающий сплайн, лежащий в плоскости, содержащей точки  $A, B, C$ .

Отметим, что если требовать для локального полиномиального сплайна равенство нулю производных выше второго порядка в точках сопряжения  $A$  и  $C$ , то получаются сплайны более высокой степени, которые более плотно прилегают к углу.

### 2.2. Построение сглаживающей поверхности в пространстве

Применим рассмотренный метод изогеометрического сглаживания ломаных на плоскости к построению сглаживающей поверхности в пространстве. На плоскости  $XU$  задана некоторая прямоугольная область, на которую нанесена равномерная прямоугольная сетка. В узлах сетки определена скалярная функция  $F$ . Линии сетки параллельные  $X$  будем называть горизонтальными, а параллельные  $U$  – вертикальными. Измельчим эту исходную сетку, разбивая любую исходную ячейку на четыре равных мелких ячейки. Значение  $F$  в узлах новой сетки находятся осреднением. Сначала рассчитаем кусок гладкой поверхности для прямоугольника  $P$  с центром в узле крупной сетки, состоящего из четырех ячеек мелкой сетки.  $P$  содержит девять узлов мелкой сетки. На рисунке 2а проиллюстрировано построение сглаживающей поверхности. Шаблон для расчета  $F$  на  $P$  показан на рисунке 2б. Рассмотрим одну из сторон прямоугольника  $P$ , она содержит три узла мелкой сетки  $A, B, C$ , где  $A$  и  $C$  – концы отрезка, а  $B$  – его середина. Этим трем точкам соответствуют точки в пространстве  $A', B', C'$ , которые имеют те же координаты по  $X$  и  $U$ , а  $Z$ -координата – это значение функции  $F$  в этой точке. По этим трем точкам  $A', B', C'$  строим локальный сплайн, сглаживающий угол  $A'B'C'$ . Таким же образом построим сплайны и для других сторон прямоугольника  $P$ . Теперь построим сплайн для отрезка, соединяющего середины горизонтальных сторон. Он имеет три точки: две концевые  $B$  и  $D$  и одну среднюю  $E$  – центр области  $P$ . В этом случае  $Z$ -координаты точек  $B'$  и  $D'$  будут модифицированы следующим образом. В качестве  $Z$  будет взято значение сплайна для соответствующей горизонтальной стороны в средней ее точке. Далее перейдем непосредственно к вычислению значения  $F$  в точке  $x_0, y_0$ , принадлежащей области  $P$ . Проведем плоскость  $u = y_0$ , она пересекает три сплайна, расположенных в плоскостях, перпендикулярных плоскости  $XU$  и проходящих через вертикальные стороны и вертикальный средний отрезок области  $P$ .

По этим трем точкам пересечения (плоскости  $u = y_0$  и сплайнов) строим сплайн, лежащий в плоскости  $u = y_0$ . Для

нахождения значения сплайна в точке  $x_0$  делаем обратное линейное преобразование. Построенная поверхность показана на рисунке 2с. Отметим, что как по горизонтальным, так и по вертикальным линиям сетки получаем дважды непрерывно дифференцируемую функцию. Таким же свойством обладает построенная поверхность. Аналогичным образом может быть построена сглаживающая поверхность и для скалярной функции, заданной на произвольной криволинейной четырехугольной сетке с выпуклыми ячейками.

При построении гладких поверхностей с изогеометрическими свойствами в задачах визуализации можно использовать следующую методику. Заранее вычисляем значение базового сплайна 4-й степени с достаточно мелким (желательно постоянным) шагом на отрезке  $[-1,1]$ . Тогда при построении локального сплайна для каких-либо трех точек используется соответствующее линейное преобразование. Саму поверхность можно задавать как серию сечений плоскостями, перпендикулярными плоскости  $XU$  и параллельными одной из осей  $X$  или  $Y$  с достаточно мелким шагом, на которых строятся локальные сплайны. В этом случае время построения поверхности будет линейно зависеть от количества ячеек.

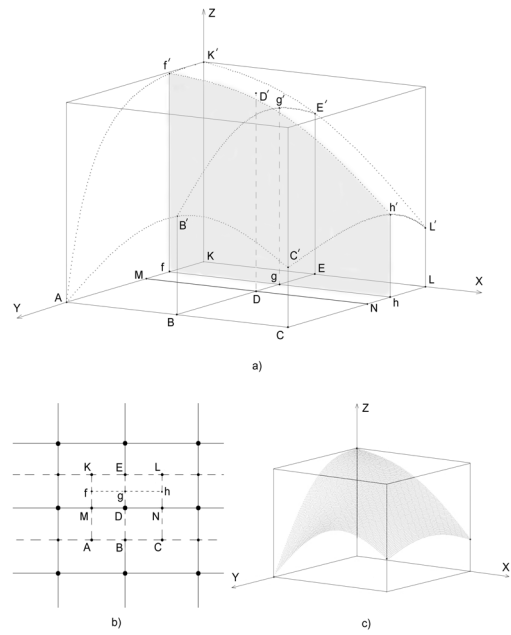


Рис. 2. Построение сглаживающей поверхности

### 3. АЛГОРИТМЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ПОИСКА

#### 3.1. Поиск на множестве тетраэдров

Рассмотрим задачу геометрического поиска в следующей постановке (она приведена в [2]). Имеется некоторая совокупность тетраэдров (рис. 1а), которые могут пересекаться (т.е., иметь общие внутренние точки). Для заданной точки нужно определить множество тетраэдров, которым она принадлежит. Считаем, что поиск ориентирован на массовые запросы (т.е., предполагается, что поиск будет осуществляться по данной совокупности тетраэдров много раз). Для эффективного решения этой задачи можно предварительно построить специальную информационную структуру-индекс и использовать ее для оптимизации поиска. Можно выделить следующие этапы построения этой структуры.

1. Рассмотрим плоские фигуры, которые получаются при пересечении какой-либо грани некоторого тетраэдра с каким-либо тетраэдром. Это будут выпуклые фигуры от треугольника до шестиугольника. Разобьем их на треугольники.
2. Эти треугольники и треугольные грани всех тетраэдров спроецируем на плоскость  $XZ$ , считая, что их проекции не вырождаются в отрезки. Получим на плоскости  $XZ$  множество треугольников, которые могут пересекаться (рис. 1б). Найдем все точки пересечения сторон этих треугольников. Проведем через эти точки и вершины треугольников прямые, лежащие в плоскости  $XZ$ , параллельные оси  $X$  (рис. 1с). При этом предполагаем, что стороны спроецированных треугольников не параллельны оси  $X$ .
3. Две такие соседние прямые образуют полосу. При этом, отрезки, которые получаются при пересечении ребер треугольника с полосой, не пересекаются строго внутри полосы и строго внутри полосы нет вершин треугольников.

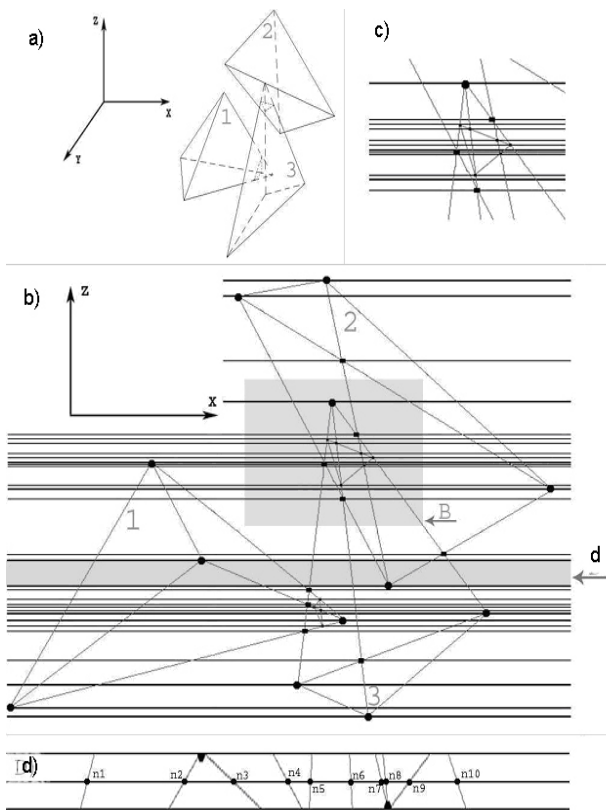


Рис. 1. Геометрический поиск на множестве тетраэдров

Таким образом, для данной полосы мы можем упорядочить последовательность ребер треугольника, пересекающихся с этой полосой (рис. 1d). Для трапеции, образуемой соседними отрезками в полосе, можно занести в структуру совокупность треугольников, в которые она входит. Если взять какую-либо трапецию, то для любой ее внутренней точки, прямая проходящая через нее перпендикулярно плоскости XZ, проходит ровно через ту совокупность граней тетраэдров, в проекции которых входит эта трапеция. Для некоторой трапеции рассмотрим множество прямых, проходящих через точки четырех ее сторон, перпендикулярно плоскости XZ. Эти прямые образуют замкнутую поверхность, ограничивающую некоторый объем в пространстве, который мы назовем «трубой». Отметим, что куски граней тетраэдров, которые получаются при пересечении с «трубой», не пересекаются между собой, и внутри «трубы» нет вершин тетраэдров. Поэтому, можно упорядочить последовательность этих кусков граней для каждой «трубы». Для каждой области, ограниченной «трубой» и смежными кусками граней, заносим в структуру список тех тетраэдров, в которых она содержится.

4. Задача поиска решается в три этапа, причем, на каждом шаге используется дихотомия. Пусть дана точка  $(x,y,z)$ , будем искать множество тетраэдров, которым она принадлежит. На первом этапе ищется полоса, в которой лежит точка  $(x,z)$ . На втором – трапеция в этой полосе, в которую попадает точка  $(x,z)$ . На третьем – область в трехмерной «трубе», ограниченная смежными кусками граней тетраэдров, которой принадлежит точка  $(x,y,z)$ . Вычислительная сложность поиска равна  $O(\ln(N))$ , где N – число тетраэдров.

Отметим, что в плоской постановке подобная задача рассматривалась в [1].

В следующем разделе будет рассмотрено обобщение этой задачи для случая произвольных многогранников в  $E^3$ . В его основу будет положена общая схема рассуждений из данного раздела.

### 3.2. Поиск на множестве произвольных несамопересекающихся многогранников $E^3$

Рассмотрим множество M произвольных не самопересекающихся многогранников (возможно, не выпуклых и многосвязных). Ясно, что грани при этом могут представлять многосвязные области, ограниченные замкнутыми ломаными линиями.

Рассмотрим область D, являющуюся пересечением плоскости T, содержащей грань G некоторого многогранника V с некоторым другим многогранником W. Считаем, что плоскость T не проходит через вершину W. D может быть, в принципе, многосвязной областью, и его граница будет состоять из некоторой совокупности замкнутых кусочно-линейных контуров. Опишем, как строятся эти контуры. Пусть  $A = \{A_i, i=1,l\}$  – совокупность всех ребер многогранника W, которые пересекаются с плоскостью T и  $P = \{P_i, i=1,l\}$  – совокупность точек пересечения соответствующих ребер с T. Возьмем ребро  $A_j$  и выберем одну из двух граней, которым  $A_j$  принадлежит. Далее выбираем из всех ребер этой грани такое, что расстояние от точки пересечения соответствующей этому ребру до  $P_j$  является наименьшим. Продолжая процесс, мы переходим с очередной грани на смежную грань и строим последовательность ребер и последовательность соответствующих им точек пересечения с плоскостью T из

P, которые задают контур, пока не вернемся к исходным ребру  $A_j$  и точке  $P_j$ . Таким образом, мы получаем замкнутый контур. Далее, выбираем любое ребро, не входящее в построенную последовательность ребер, и строим очередной контур. Продолжаем этот процесс, пока не исчерпаем множество A. Получим полностью построенную границу области D, состоящую из замкнутых контуров.

Далее действуем аналогично случаю с тетраэдрами. При пересечении каждой грани каждого многогранника со всеми остальными многогранниками из M получаем ее разбиение на области, каждая из которых входит в определенную совокупность многогранников из M. Затем проецируем разбиение таким образом грани на плоскость XZ. Считаем при этом, что никакая грань при проецировании не вырождается в отрезок. Рассмотрим пересечения проекций всех подобных граней, с учетом разбиения на подобласти. Найдем точки пересечения всех отрезков границ проекций граней. Проведем через вершины и через эти точки пересечения прямые, лежащие в плоскости XZ и параллельные оси X, при этом считаем, что никакие проекции сторон граней не параллельны оси X. Получаем, как и в случае тетраэдров, разбиение плоскости XZ на полосы, строго внутри которых не происходит пересечения отрезков проекций граней и их вершин и, таким образом, части отрезков, лежащие внутри полосы, можно упорядочить. Получим упорядоченную последовательность трапеций.

Построим для каждой такой трапеции, аналогично алгоритму для тетраэдров, «трубу». При пересечении «трубы» с гранями выделяются трехмерные области. Мы можем упорядочить грани и трехмерные области. Причем, все внутренние точки какой-либо такой области входят в одну и ту же совокупность многогранников из M. Заносим список этих многогранников в поисковую структуру. Получаем структуру для геометрического поиска на множестве многогранников M. Ясно, что суммарное число сторон всех спроецированных контуров, задающих границы областей пересечения многогранников с плоскостями, содержащими грани не превышает  $k^2$ . Соответственно, количество точек пересечения этих сторон между собой не превышает  $k^4$ . Поиск для этого случая осуществляется так же, как и для множества тетраэдров и его вычислительная сложность равна  $O(\ln(k)) + O(\ln(k^2)) + O(\ln(k^4))$ , т.е. равна  $O(\ln(k))$ , (k-суммарное число граней всех многогранников из M).

## 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведенные алгоритмы за исключением последнего реализованы и оттестированы. При разработке использовался язык C стандарта ANSI, чтобы обеспечить переносимость на различные платформы. Для описания структур применялся язык разметки XML. Возможна реализация этих алгоритмов и их модификаций в виде плагинов для использования их в системах обработки и визуализации научной информации.

## 5. БИБЛИОГРАФИЯ

- [1] Препарата Ф., Шеймос М. Вычислительная геометрия. Введение. Пер. с англ. - М: Мир, 1989 - 478 с.
- [2] Kulikov A.I. A system of visualization for problems of geophysics //The 6-th German-Russian workshop "Pattern

recognition and Image Understanding”, OGRW-6-2003, Katun Village, Altai Region, Russian Federation, August 25-30, 2003.- P. 234-237

[3] Kulikov A.I. Visualization of Geophysical Information //12-th International Conference on Computer Graphics, GraphiCon'2002, Nizhni Novogorod, September 16- September 21.- P. 204-211.

#### **Об авторе**

Александр Иванович Куликов – заведующий кафедрой информатики ВКИ НГУ, сотрудник Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН.

Адрес: Новосибирск, 630090, пр-т Лаврентьева, 6, ИВМиМГ.

Телефон: 356 601

E-mail: [kulikov@nmsf.sccc.ru](mailto:kulikov@nmsf.sccc.ru)

## **On some problems of computational geometry. Isogeometric smoothing and geometric search**

#### **Abstract**

The paper is devoted to a visualization problem of spatially distributed data. Algorithms of geometric search for an arbitrary set of polyhedrons in 3D space; and isogeometric smoothing based on local splines for 2D and 3D cases are suggested

**Keywords:** *local spline, isogeometric smoothing, geometric search, computational complexity.*

#### **About the author**

Alexander Kulikov is a Head of IT department of College of Informatics, Novosibirsk State University.

His contact email is [kulikov@nmsf.sccc.ru](mailto:kulikov@nmsf.sccc.ru).